קוואזי-מצבים טופולוגיים

כנס חפירות על מתמטיקה, 25/01/2021

עדי דיקשטיין, אוניברסיטת תל אביב

רקע וסקירה היסטורית

- בשנת 1932 John von Neumann ניסח מודל עבור מכניקת הקוונטים.
- האובייקטים המרכזיים במודל הם גדלים מדידים (observables) ומצבים (states).
- הגדלים הם אופרטורים הרמיטיים על מרחב הילבט מרוכב $\mathcal{H}$.
- למרחב הגדלים יש מבנה של אלגברת לי $\mathcal{A}_q$ כאשר סוגר לי נתון ע"י

$$[A,B]_\hbar := \frac{i}{\hbar}(AB-BA).$$

- מצבים הינם פונקציונלים ליניאריים ממשיים, חיוביים ומנורמלים על $\mathcal{A}_q$.

רקע וסקירה היסטורית

- מספר פיזיקאים התנגדו לאקסיומת הלינאריות בהגדרה של מצבים.

- הסיבה להתנגדות הייתה הטענה שאפריורי, אדטיביות של מצב צריכה להתקיים רק עבור גדלים A, B שניתן למדוד סימולטנית.

- מבחינה מתמטית משמעות הדבר היא ש-A ו-B תחלפים, כלומר

$$[A, B]_\hbar = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA.$$

רקע וסקירה היסטורית

- על כן, הוכללה ההגדרה של מצב והוגדר אובייקט כללי יותר שנקרא **קוואזי-מצב** (quasi-state), זהו פונקציונל חיובי ומנורמל על מרחב הגדלים המדידים, כך שהצמצום שלו לתת-אלגבראות חילופיות הוא לינארי.

- השאלה המתבקשת היא האם קיים קוואזי-מצב לא טריוויאלי?

- התשובה לשאלה זו נתונה ע"י המשפט הבא.

משפט Gleason 1957

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט עם $\dim \mathcal{H} \geq 3$. אזי כל קוואזי-מצב הוא לינארי.

סימולטניות

- ע"פ עקרון אי-הוודאות, שני גדלים A, B ניתנים למדידה בסימולטנית אם ורק אם הם מתחלפים, כלומר,

$$[A, B]_{\hbar} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AB = BA.$$

- כיוון שבמודל של von Neumann גדלים מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים על מרחב הילברט, נוכל לנסח מחדש את מושג החילופיות בעזרת הטענה הבאה:

טענה

יהיו A, B אופרטורים על מרחב הילברט סוף-מימדי. אזי A, B מתחלפים אם ורק אם קיים אופרטור C ופולינומים p, q עבורם $A = p(C)$ ו-$B = q(C)$.

- על כן, נוכל לנסח מחדש את דרישת האדטיביות בהגדרת קוואזי-מצבים כך שהצמצומים שלהם לתת-אלגבראות הנוצרות ע"י איבר אחד - יהיו לינאריים.

קוואזי-מצב טופולוגי

- יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי.
- נסמן ע"י $C(X)$ את אלגברת הפונקציות הממשיות הרציפות על X.
- לכל $\varphi \in C(X)$ נגדיר את תת-האלגברה הנוצרת ע"י φ להיות

$$C(\varphi) := \{f \circ \varphi \,:\, f \in C(\mathrm{im}\,\varphi)\} = \mathrm{Cl}\left(\{p \circ \varphi \,:\, p \in \mathbb{R}[x]\}\right).$$

הגדרה

פונקציונל $\rho\colon C(X) \to \mathbb{R}$ נקרא **קוואזי-מצב טופולוגי** על X אם הוא מקיים את האקסיומות הבאות:

- (נרמול) $\rho(1) = 1$,
- (חיוביות) $\rho(F) \geq 0$ עבור $F \geq 0$,
- (קוואזי-לינאריות) הצמצום $\rho|_{C(\varphi)}$ הוא לינארי לכל $\varphi \in C(X)$.

קוואזי-מצב טופולוגי

דוגמה

יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי ותהי μ מידת הסתברות בורלית על X. אזי נוכל להגדיר פונקציונל $\rho\colon C(X) \to \mathbb{R}$ ע"י

$$\rho(f) := \int_X f \, d\mu.$$

זהו למעשה פונקציונל לינארי, ולכן מדובר בדוגמה טריוויאלית של קוואזי-מצב.

- השאלה המתבקשת היא האם קיימות דוגמאות לא טריוויאליות?

משפט J. Aarnes, 1970

כל קוואזי-מצב טופולוגי הוא לינארי.

- אך לאחר כמה חודשים מהפרסום נמצאו **טעויות במאמר** וההוכחה התבררה **כשגויה**.

קוואזי-מצב טופולוגי

- Aarnes המשיך לחקור את הסוגיה הזו, עד שלבסוף הכריע את הבעיה:

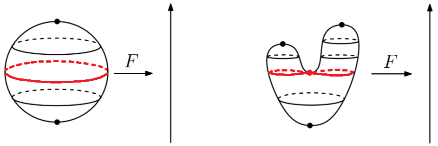
משפט J. Aarnes, 1991

קיימים קוואזי-מצבים טופולוגיים לא טריוויאלים.

- Aarnes פרסם מספר מאמרים בהם הציג כמה בניות של קוואזי-מצבים ופיתח את התורה של קוואזי-מצבים טופולוגיים.
- הכלי העיקרי בהוכחת הקיום של קוואזי-מצבים היה הגדרת ומתן דוגמה לאובייקט חדש, שנקרא **קוואזי-מידה**.
- נציג תיאור גיאומטרי לאחת הדוגמאות החשובות ביותר של קוואזי-מצב טופולוגי.

קוואזי-מצב החציון

- תהי S^2 ספירת היחידה ב-$\mathbb{R}^3$ ותהי σ מידת לבג המנורמלת על S^2.
- תהי $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס.
- נסמן ב-$m_\sigma(f)$ את רכיב הקשירות היחיד של קו-גובה של f עבורו כל רכיב קשירות של $S^2 \setminus m_\sigma(f)$ הוא בעל שטח $\geq \frac{1}{2}$.
- נגדיר את **קוואזי-מצב החציון** של f להיות $\zeta(f) := f(m_\sigma(f))$.
- ζ מתרחב באופן רציף יחיד על כל $C(S^2)$.



קוואזי-מצב החציון

- ברור כי $\zeta(f) \geq 0$ עבור $f \geq 0$.

- הפונקציה 1 היא אינה פונקציית מורס, אך ניתן לקרב אותה במידה שווה ע"י פונקציות מורס, ולכן נסיק כי מתקיים $\zeta(1) = 1$.

- נשים לב כי אם f, g הן פונקציות מורס על S^2 עבורן $f = \varphi \circ h,\ \ g = \psi \circ h$ אז ל-f, g יש את אותם קווי הגובה ולכן

$$\zeta(f+g) = \zeta(f) + \zeta(g).$$

תכונה זו מתרחבת לכל מרחב הפונקציות הרציפות, ולכן ζ אכן מקיים את תכונת קוואזי-הלינאריות, ומכאן ζ הוא אכן קוואזי-מצב.

- השאלה המתבקשת היא: האם ζ הוא קוואזי-מצב לא טריוויאלי?
כלומר, האם ζ הוא אינו פונקציונל לינארי?

קוואזי-מצב החציון

דוגמה: חוסר לינאריות של ζ

- נסמן ב-x, y, z את פונקציות הקואורדינטות על S^2 המתקבלות מ-$\mathbb{R}^3$.
- קל להשתכנע כי

$$\zeta(x^2) = \zeta(y^2) = \zeta(z^2) = 0.$$

- מצד שני $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ולכן

$$\zeta(x^2 + y^2 + z^2) = \zeta(1) = 1 \neq 0 = \zeta(x^2) + \zeta(y^2) + \zeta(z^2).$$

- כיוון ש-ζ לא לינארי, נסיק ממשפט ההצגה של Riesz כי לא קיימת מידת בורל על S^2 שמאפשרת לחשב את ערכי ζ ע"י אינטגרציה לפיה.

קוואזי-מצב החציון

תכונות בסיסיות

- ζ אינווריאנטי ביחס לדיפאומורפיזמים שומרי שטח.
כלומר, אם $T\colon S^2 \to S^2$ הוא דיפאומורפיזם שומר שטח, אז לכל פונקציה רציפה $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$T_*\zeta(f) := \zeta(f \circ T) = \zeta(f).$$

- לכל $f, g \in C(S^2)$ מתקיים כי

$$f^{-1}(\zeta(f)) \cap g^{-1}(\zeta(g)) \neq \varnothing.$$

- Siburg נעזר בתכונות אלה בכדי לספק הוכחה חדשה למשפט Borsuk-Ulam במימד 2.

משפט בורסוק-אולם

משפט בורסוק-אולם

תהי $V : S^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה רציפה. אזי קיימת $x_0 \in S^2$ עבורה

$$V(x_0) = V(-x_0)$$

הוכחה:

- תהי $\sigma : S^2 \to S^2$ ההעתקה האנטיפודלית $\sigma(x) = -x$. נשים לב כי זו העתקה שומרת שטח.
- נגדיר $F(x) = V(x) - V \circ \sigma(x) = (f_1, f_2)(x)$.
- הפונקציות f_1, f_2 הן אי-זוגיות, לכן מתקיים כי

$$\zeta(f_i) = \zeta(f_i \circ \sigma) = \zeta(-f_i) = -\zeta(f_i), \quad i = 1, 2 \;\Rightarrow\; \zeta(f_1) = \zeta(f_2) = 0.$$

- לכן קיים $x_0 \in f_1^{-1}(0) \cap f_2^{-1}(0)$, ומכאן

$$V(x_0) = V \circ \sigma(x_0) = V(-x_0).$$

אלגוריתם לחישוב קוואזי-מצב החציון

לקוואזי-מצב החציון ζ ישנם שימושים רבים נוספים, על כן נשאלת השאלה כיצד ניתן לחשב אותו באופן כללי. המשפט הבא נותן מענה לשאלה זו.

משפט D.-Zapolsky, 2018

קיים אלגוריתם שמקבל כקלט פונקציית ליפשיץ $f \in C(S^2)$ ופרמטר שלם N גדול מספיק - ומחזיר כפלט מספר אשר נבדל מ-$\zeta(f)$ בלא יותר מאשר

$$\frac{C}{N} \cdot \|f\|_{\mathrm{Lip}}$$

עבור איזשהו קבוע $C > 0$, כאשר

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \inf \left\{ L > 0 \,:\, |f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x,y), \;\; \forall\, x,y \in X \right\}.$$

אלגוריתם זה הוא בעל סיבוכיות של $O(N^2 \log N)$.

כיום אנו יודעים להוכיח כי $C \approx 91.3$. יתכן כי ניתן להקטין משמעותית הערכה זו.

קוואזי-מצב Aarnes

בכדי לתאר את האלגוריתם נציג דוגמה נוספת של קוואזי-מצב.

- תהי $Z \subset S^2$ קבוצה המורכבת ממספר אי-זוגי של נקודות, נסמן $\#Z = 2n + 1$.
- תהי $F\colon S^2 \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס.
- נסמן ב-$m_Z(F)$ את רכיב הקשירות היחיד של קו-גובה של F עבורו כל רכיב קשירות של $S^2 \setminus m_Z(F)$ מכיל לכל היותר n נקודות מתוך Z.
- נגדיר את **קוואזי-מצב Aarnes** של F להיות $\zeta_Z(F) := F(m_Z(F))$.
- ζ_Z מתרחב באופן רציף יחיד על כל $C(S^2)$.

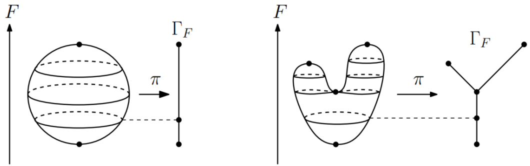
גרף Reeb

בכדי לחשב את $\zeta_Z(F)$ נציג את המושג של גרף Reeb.

- לצורך פשטות נניח כי $F\colon S^2 \to \mathbb{R}$ היא פונקציית מורס גנרית.

- נגדיר על S^2 יחס שקילות באופן הבא: $x \sim y$ אם ורק אם x, y נמצאים באותו רכיב הקשירות של $F^{-1}(\alpha)$, עבור איזשהו $\alpha \in \mathbb{R}$.

- מרחב המנה שמתקבל הוא עץ, נסמנו Γ_F, ונשים לב כי קודקודים שלו מתאימים לנקודות הקריטיות של F. Γ_F נקרא **גרף Reeb** של F.



קוואזי-מצב Aarnes

- תהי $F\colon S^2 \to \mathbb{R}$ פונקציית מורס ותהי $\pi\colon S^2 \to \Gamma_F$ העתקת המנה לגרף Reeb של F.

- תהי $Z \subset S^2$ תת-קבוצה סופית בעלת עוצמה $2n+1$.

- נתבונן בקבוצה $\pi(Z) \subset \Gamma_F$, יתכן כי היא בעלת כפילויות.

- קיימת ויחידה נקודה $m'_Z \in \Gamma_F$ עבורה כל רכיב קשירות של $\Gamma_F \setminus \{m'_F\}$ מכיל לכל היותר n נקודות מתוך $\pi(Z)$, כולל כפילויות.

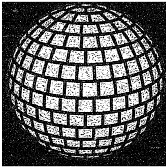
- נשים לב כי $\pi(m_Z(F)) = m'_Z$ ולכן

$$\zeta_Z(F) = F(\pi^{-1}(m'_Z)).$$

- כמסקנה מכך, במידה ונדע כיצד לחשב את Γ_F ואת $\pi(Z)$ אז נוכל לחשב את $\zeta_Z(F)$.

קירוב של קוואזי-מצב החציון בעזרת קוואזי-מצב Aarnes

- Yanmu Zhou הוכיח ב-1995 כי לכל k טבעי קיימת חלוקה של הספירה S^2 לתחומים שווי שטח בעלי קוטר $\geq 7/\sqrt{k}$.



Partition of the Sphere into 400 Pieces

משפט D.-Zapolsky, 2018

יהי k אי-זוגי, ונסמן ב-Z_k קבוצה בת k נקודות אשר כל אחת מהן שייכת לתחום יחיד מתוך התחומים של Zhou. אזי לכל פונקציית ליפשיץ $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ מתקיים

$$|\zeta(f) - \zeta_{Z_k}(f)| \leq \frac{7}{\sqrt{k}} \cdot \|f\|_{\mathsf{Lip}}.$$

האלגוריתם לחישוב קוואזי-מצב החציון

- **קלט**: $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ - ליפשיץ, $N \geq 27$. **פלט**: $\zeta_Z(F)$.

- $\mathcal{T}_N$ - שילוש של S^2 עם $20N^2$ משולשים. (סיבוכיות $O(N^2)$)

- $F\colon S^2 \to \mathbb{R}$ קירוב לינארי למקוטעין של f ביחס ל-$\mathcal{T}_N$. (סיבוכיות $O(N^2)$)

- $\|F - f\|_{C^0} \leq c_1 \cdot \|f\|_{\text{Lip}}/N$ ו- $\|F\|_{\text{Lip}} \leq c_2 \cdot \|f\|_{\text{Lip}}$.
(כאשר $c_1 \approx 1.323,\ c_2 \approx 7.544$)

- נבחר k אי-זוגי כך שכל תחום ב-k-חלוקה של Zhou יכיל לפחות קודקוד אחד של $\mathcal{T}_N$. תהי Z_k בחירה של k קודקודים כנ"ל. אזי יתקיים

$$7/\sqrt{k} \leq c_3/N.$$

(כאשר $c_3 \approx 11.879$, סיבוכיות $O(N)$)

האלגוריתם לחישוב קוואזי-מצב החציון

- כיוון שקוואזי-מצבים הם 1-ליפשיץ ביחס לנורמת C^0 נקבל כי

$$\begin{aligned}|\zeta(f)-\zeta_Z(F)| &\le |\zeta(f)-\zeta(F)|+|\zeta(F)-\zeta_Z(F)|\\ &\le \|f-F\|_{C^0}+(7/\sqrt{k})\cdot\|F\|_{\text{Lip}}\\ &\le (c_1+c_2\cdot c_3)\cdot\|f\|_{\text{Lip}}/N.\end{aligned}$$

(כאשר $c_1+c_2\cdot c_3\approx 91.302$)

- הערך $\zeta_Z(F)$ ניתן לחישוב באופן אלגוריתמי באמצעות שימוש בגרף Reeb. (סיבוכיות $O(N^2\ \text{log}\ N)$)

נעיר כי חישוב גרף Reeb הוא החלק באלגוריתם בעל הסיבוכיות הגבוהה ביותר.

קוואזי-מידות

- יהי X מרחב האוסדוף קומפקטי.
- נסמן ע"י $\mathcal{C}(X)$ את אוסף הקבוצות הסגורות של X, ע"י $\mathcal{O}(X)$ את אוסף הקבוצות הפתוחות של X, ונגדיר $\mathcal{CO}(X) := \mathcal{C}(X) \cup \mathcal{O}(X)$.

הגדרה

פונקציה $\tau\colon \mathcal{CO}(X) \to [0,1]$ תיקרא **קוואזי-מידה** על X אם היא מקיימת את האקסיומות הבאות:

- (נרמול) $\tau(X) = 1$.
- (מונוטוניות) $\tau(A) \le \tau(B)$ עבור $A \subseteq B$.
- (אדטיביות) אם $A \cap B = \varnothing$ וגם $A \cup B \in \mathcal{CO}(X)$ אז

$$\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B).$$

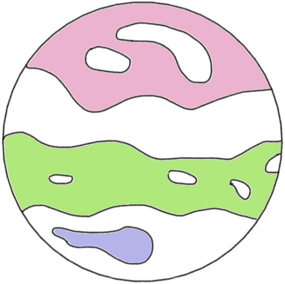
- (רגולריות) לכל קבוצה פתוחה U מתקיים:

$$\tau(U) = \text{sup}\{\tau(K) \;:\; K \subset U,\; K \text{ compact}\}.$$

קוואזי-מידות

בכדי להציג דוגמאות לקוואזי-מידות נעזור טיעון הבא של F. Zapolsky:

- תהי X יריעה n-מימדית, אזי קוואזי-מידות על X נקבעות ביחידות ע"פ הערכים שלהן על תת-יריעות n-מימדיות קומפקטיות עם שפה.
- בפרט, קוואזי-מידות על S^2 נקבעות ביחידות ע"פ הערכים שלהן על דיסקים בעלי שפה חלקה.



קוואזי-מידות

דוגמה

תהי $Z \subset S^2$ קבוצה המורכבת מ-3 נקודות שונות.
עבור דיסק סגור עם שפה חלקה $D \subset S^2$ נגדיר

$$\tau_Z(D) := \begin{cases} 1, & \#Z \cap D \geq 2, \\ 0, & \#Z \cap D \leq 1. \end{cases}$$

נשים לב כי אם D_1, D_2 הם שני דיסקים קטנים וזרים שכל אחד מהם מכיל נקודה אחת בלבד מ-Z, אזי $\tau_Z(D_1) = \tau_Z(D_2) = 0$. בנוסף, $Q = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ מכיל נקודה אחת בלבד, אבל $\tau_Z(Q) = 1$. אין כאן סתירה עם ההגדרה של τ_Z משום ש-Q אינו דיסק.

קוואזי-מידה זו נקראת **קוואזי-מידת Aarnes**.

ניתן להכליל דוגמה זו למקרה בו Z מורכב ממספר אי-זוגי כלשהו של נקודות.

קוואזי-מידות

דוגמה

תהי σ מידת לבג המנורמלת על S^2.
עבור דיסק סגור עם שפה חלקה $D \subset S^2$ נגדיר

$$\tau(D) := \begin{cases} 1, & \sigma(D) \geq 1/2, \\ 0, & \sigma(D) < 1/2. \end{cases}$$

נשים לב כי אם D_1, D_2 הם שני דיסקים סגורים וזרים עם מידה $\frac{1}{2} - \epsilon$ אז המשלים $Q = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ הוא יריעה פתוחה עם מידה 2ϵ. על פי ההגדרה מתקיים

$$\tau(D_1) = \tau(D_2) = 0, \quad \tau(Q) = 1 - \tau(D_1) - \tau(D_2) = 1.$$

נשים לב כי ניתן לכסות את Q ע"י איחוד של שני דיסקים סגורים A, B עם מידות קטנות, אז נקבל כי $Q \subset A \cup B$ אבל $\tau(Q) = 1 > 0 = \tau(A) + \tau(B)$.
הבחנה זו מדגישה את העובדה כי τ היא אינה מידה.
קוואזי-מידה זו נקראת **קוואזי-מידת החציון**.

אינטגרציה ביחס לקוואזי-מידה

- יהי X מרחב האוסדורף קומפקטי, ותהי τ קוואזי-מידה עליו.
- עבור פונקציה $a \in C(X)$ נרצה להגדיר את האינטגרל של a ביחס ל-τ.
- לצורך כך, נגדיר את הפונקציה

$$\hat{a} : \mathbb{R} \to [0,1], \;\; \hat{a}(\alpha) = \tau\left(\{x \in X \;:\; a(x) \geq \alpha\}\right).$$

- הפונקציה $\hat{a}$ יורדת ורציפה משמאל, ולכן ניתן להגדיר מידה σ_a על $\mathbb{R}$ ע"י

$$\sigma_a([\alpha, \beta)) = \hat{a}(\alpha) - \hat{a}(\beta).$$

- כעת נגדיר את האינטגרל של a ביחס ל-τ להיות

$$\int_X a\, d\tau := \int_{\mathbb{R}} \alpha\, d\sigma_a(\alpha)$$

אינטגרציה ביחס לקוואזי-מידה

טענה Aarnes

יהי X מרחב האוסדורף קומקפקטי, תהי τ קוואזי-מידה על X ותהי $a\colon X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי לכל $\phi \in C(\operatorname{im} a)$ מתקיים

$$\int \phi(a)\, d\tau = \int_{\mathbb{R}} \phi(\alpha)\, d\sigma_a(\alpha)$$

מסקנה

תהי $a\colon X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ותהיינה $\varphi, \psi \in C(\operatorname{im} a)$ אזי

$$\int_X (\varphi(a) + \psi(a))\ d\tau = \int_X \varphi(a)\, d\tau + \int_X \psi(a)\, d\tau.$$

משפט ההצגה של Aarnes

- כתוצאה מהמסקנה האחרונה נסיק כי כל קוואזי-מידה τ מגדירה קוואזי-מצב ρ_τ שמוגדר ע"י
$$\rho_\tau(f) := \int_X f\, d\tau.$$
- Aarnes הכליל את משפט ההצגה של Riesz והוכיח את המשפט הבא:

משפט ההצגה של Aarnes 1991

ההתאמה $\rho_\tau \mapsto \tau$ היא בייקציה בין מרחב קוואזי-המידות למרחב קוואזי-המצבים.

דוגמאות

- אם τ היא קוואזי-מידת החציון על S^2 אז $\rho_\tau = \zeta$ קוואזי-מצב החציון.
- אם $Z \subset S^2$ היא קבוצה המורכבת ממספר אי-זוגי של נקודות, אז קוואזי-המצב ζ_Z המתאים לקוואזי-מידת Aarnes τ_Z הוא קוואזי-מצב Aarnes.

תודה רבה!